



REAL ACADEMIA DE CIENCIAS
EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES
DE ESPAÑA



EXCMO. AYUNTAMIENTO
DE CASTRO URDIALES



Purposeful
Ventures



C I E M
Centro Internacional de Encuentros Matemáticos

LAS CARAS OCULTAS DE LA GEOMETRÍA

Mariángeles Pérez Rojo

maangeles.perez@murciaeduca.es

Abril 2025, XVII Seminario Nacional Estalmat



f SéNeCa⁽⁺⁾

Agencia de Ciencia y Tecnología
Región de Murcia



UNIVERSIDAD
DE MURCIA



Facultad
de Matemáticas

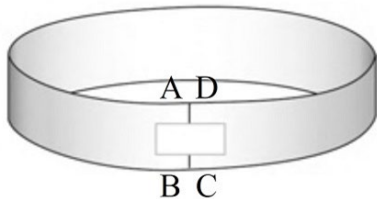


ESTALMAT
ESTÍMULO DEL TALENTO MATEMÁTICO

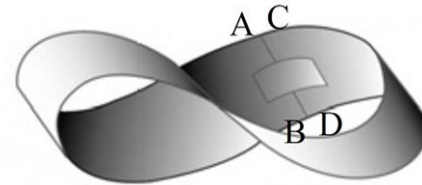
¿Qué harías con una tira de papel?



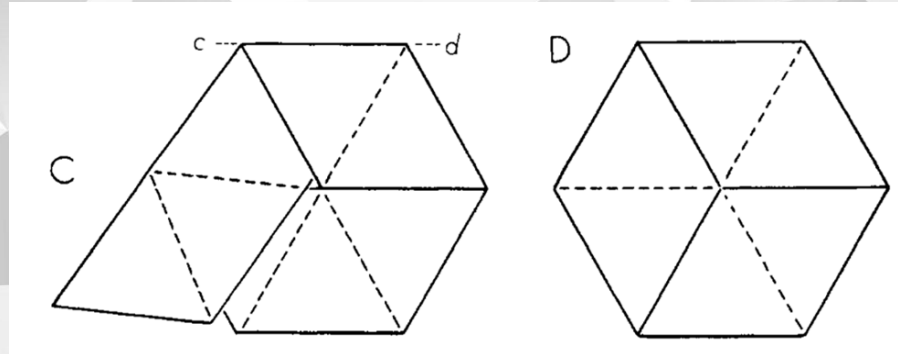
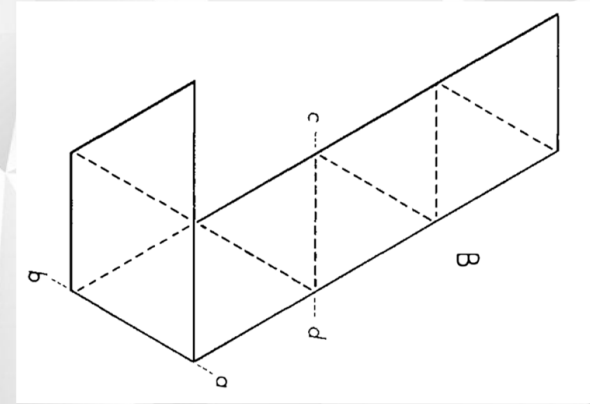
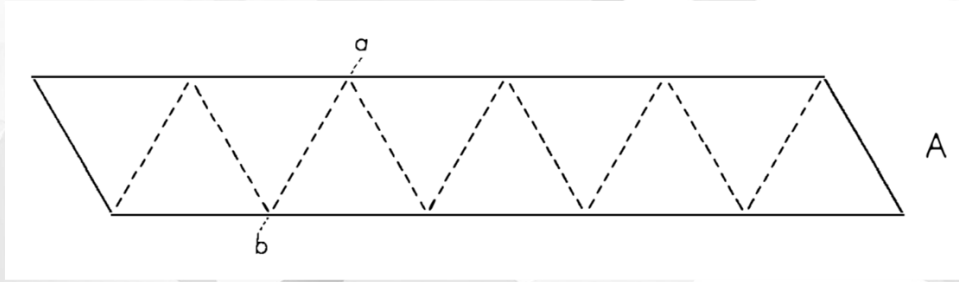
¡Una pulsera!



¡Una banda de Möbius!



¿Y si retorcemos más?



¡Hemos descubierto los flexágonos!

Si no fuera por la circunstancia trivial de que el papel de cuaderno británico y el estadounidense no tienen el mismo tamaño, los flexágonos podrían haber permanecido sin descubrir, y varios matemáticos de primer nivel se habrían perdido el placer de analizar sus curiosas estructuras.

Un poco de historia



Arthur Stone



Arthur Stone los descubrió en 1939 en la Universidad Princtown en New Jersey, y mostró a sus colegas estos resultados, de ahí salió el Comité Princtown de Flexágonos y desarrollaron una teoría matemática para explicar cómo estos juguetes de papel se plegaban.

¿Quién formaba el comité?

Arthur Stone
Topólogo



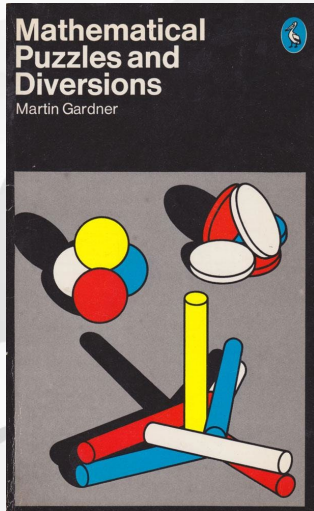
Bryant Tuckerman
Matemático

Richard Feynman
Físico

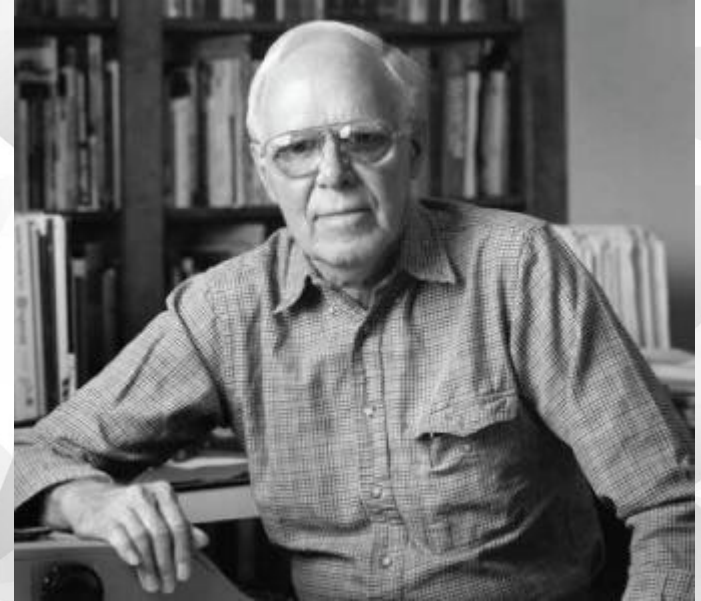


John W. Tukey
Estadístico

Un poco más de historia



La primera publicación sobre los **Flexágonos** se la debemos a **Martin Gardner**, en Diciembre de 1956, cuando escribió un artículo en la revista Scietific America. En 1959 Gardner publicó el **libro “Mathematical Puzzles and Diversions”**, lo que extendió la curiosidad por estos juguetes por todo el mundo.



Martin Gardner

¿Qué es un flexágono?



Los **flexágonos** son polígonos obtenidos a partir del plegado de tiras de papel, que tienen la fascinante propiedad de cambiar sus caras cuando se "flexionan".

¿Cómo los clasificamos?

Hay una variedad infinita y muy amplia de flexágonos compuestos por muchas formas geométricas diferentes.

Vayamos poco a poco...

Numerical Prefixes			
Number	Prefix	Number	Prefix
1	mono	11	undeca
2	di	12	dodeca
3	tri	13	trideca
4	tetra	14	tetradeca
5	penta	15	pentadeca
6	hexa	16	hexadeca
7	hepta	17	heptadeca
8	octa	18	octadeca
9	nona, ennea	19	nonadeca
10	deca	20	icosa

Para empezar, 3 familias

Hexaflexágonos



- Ciclos completos.
- Regulares

Tetraflexágonos



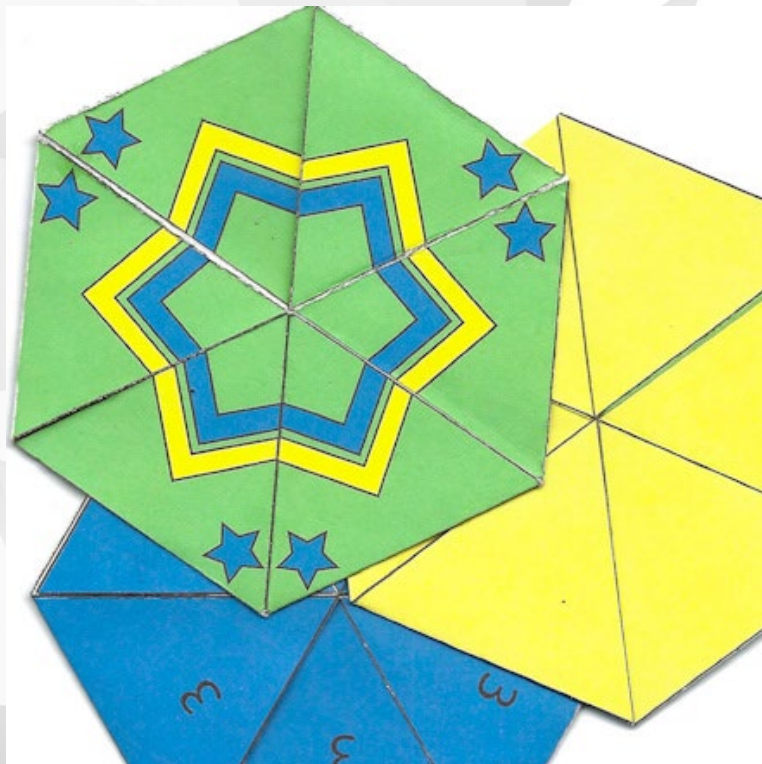
- Distintos tipos de ciclos.
- Regulares.

Dodecaflexágonos



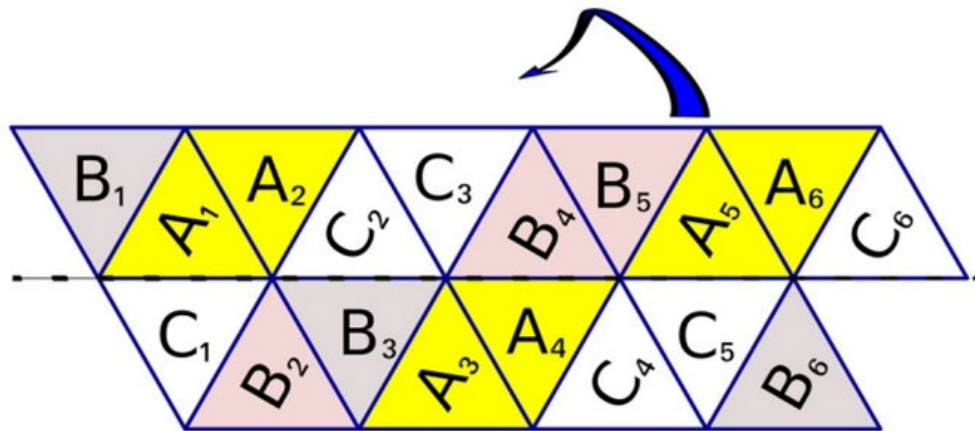
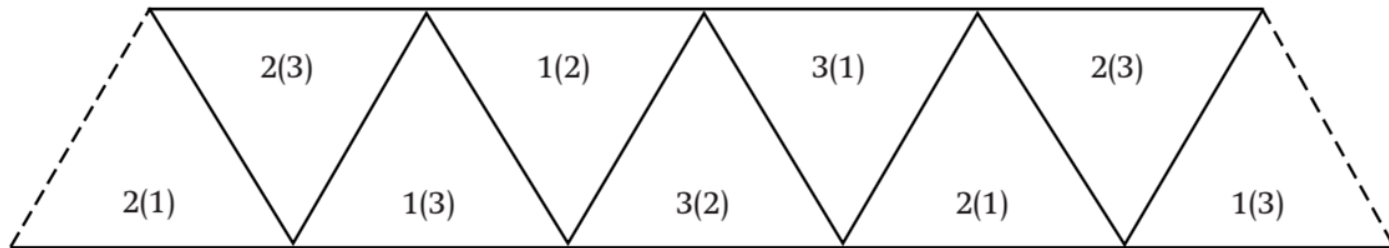
- Ciclos completos.
- Irregulares.

Tri-hexaflexágono

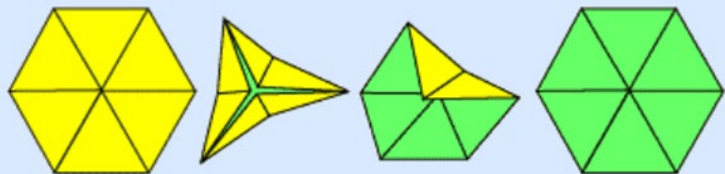


Fue el primer flexágono descubierto por Stone y posiblemente el más sencillo de todos. Vamos a estudiarlo...

¿Cómo es la plantilla?



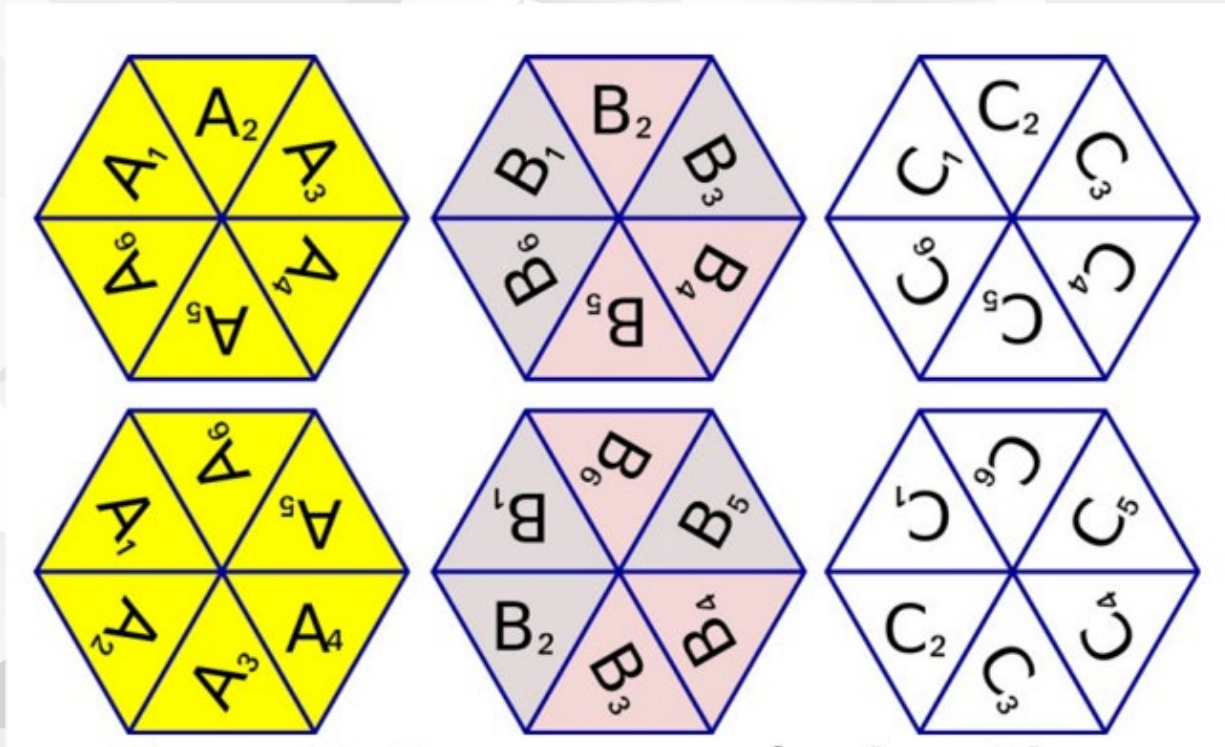
Investiga



Dobra el flexágono para juntar tres esquinas alternas. La parte superior del flexágono se abrirá si hay una nueva cara por revelar. Si no se abre, aplana el flexágono y vuelve a intentarlo con las otras tres esquinas.

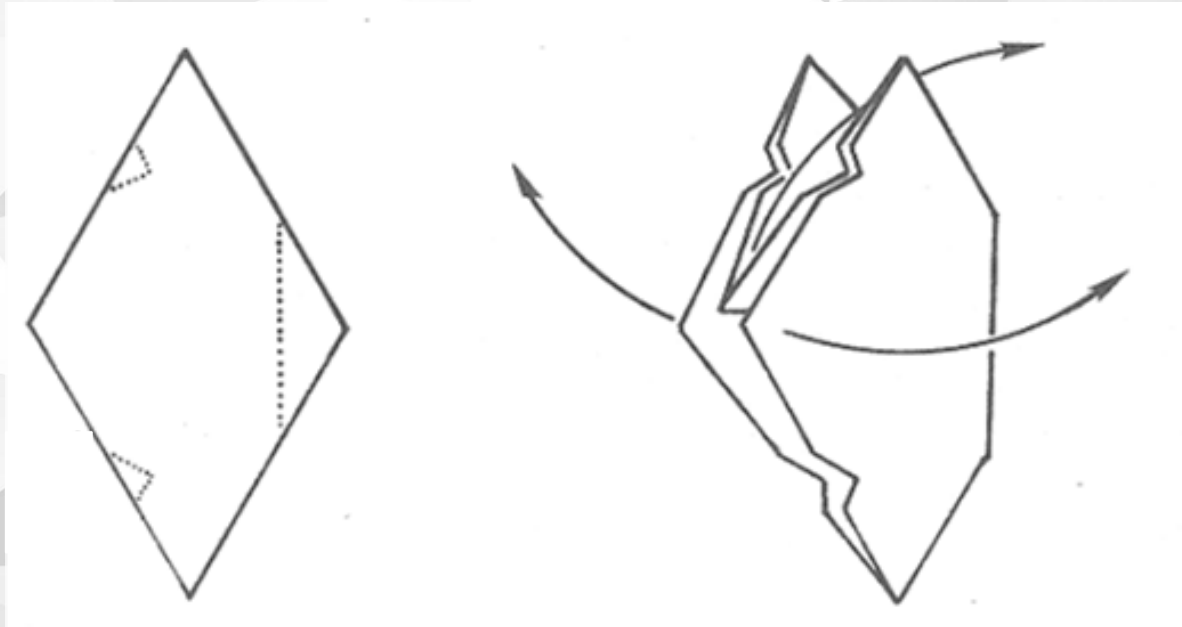
A medida que flexionas el flexágono en este proyecto, intenta encontrar todas las combinaciones posibles de caras.

¿Cuántas caras iguales tiene?



¿Un poco de magia?

Vamos a cortarlo a ver qué pasa...



Comprender para diseñar

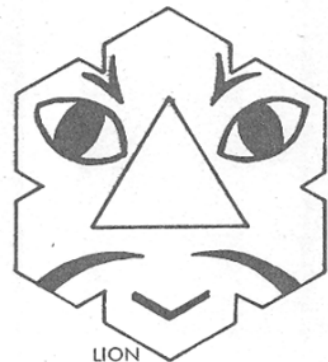
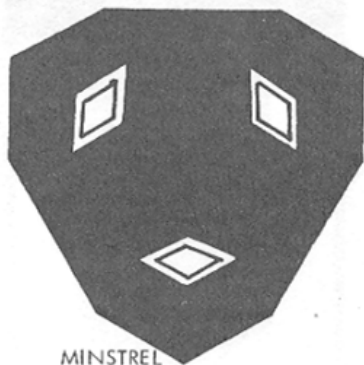
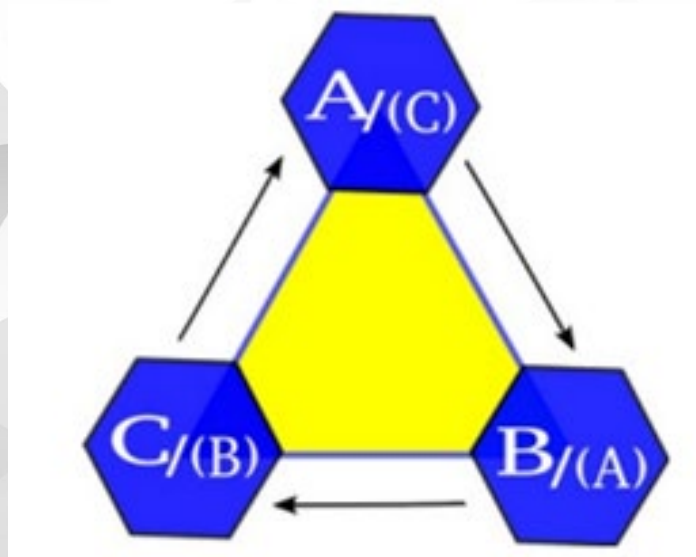


Diagrama de Flexión de Tuckerman

Para estudiar el orden en el que aparecen las caras y su frecuencia



Tetra-hexaflexágono

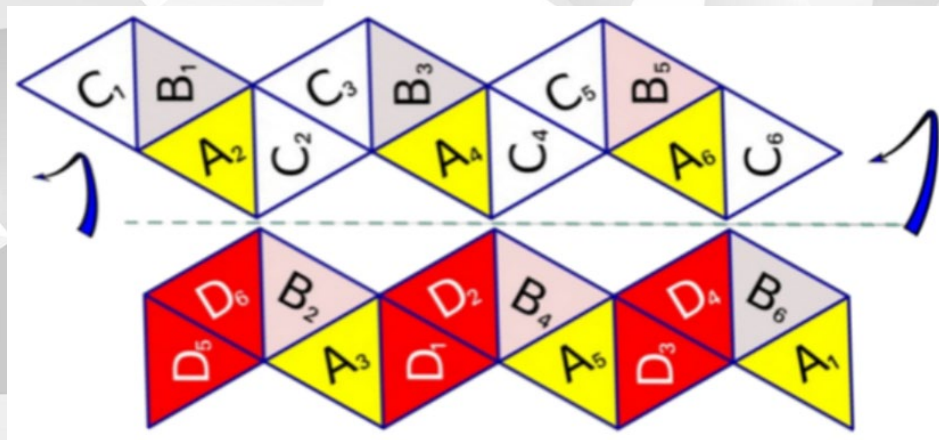
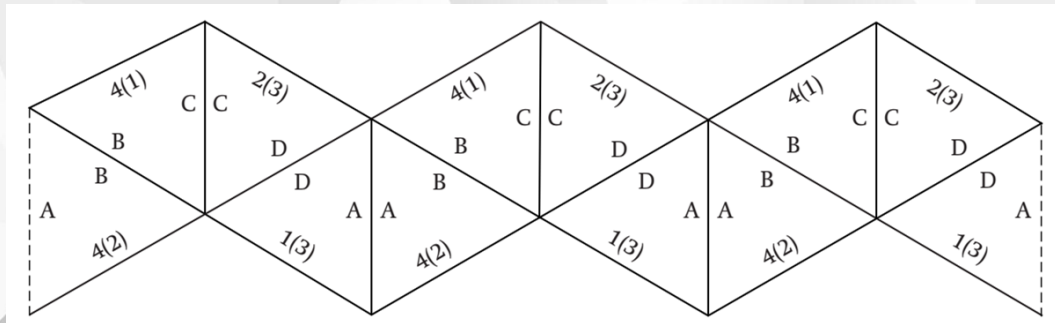
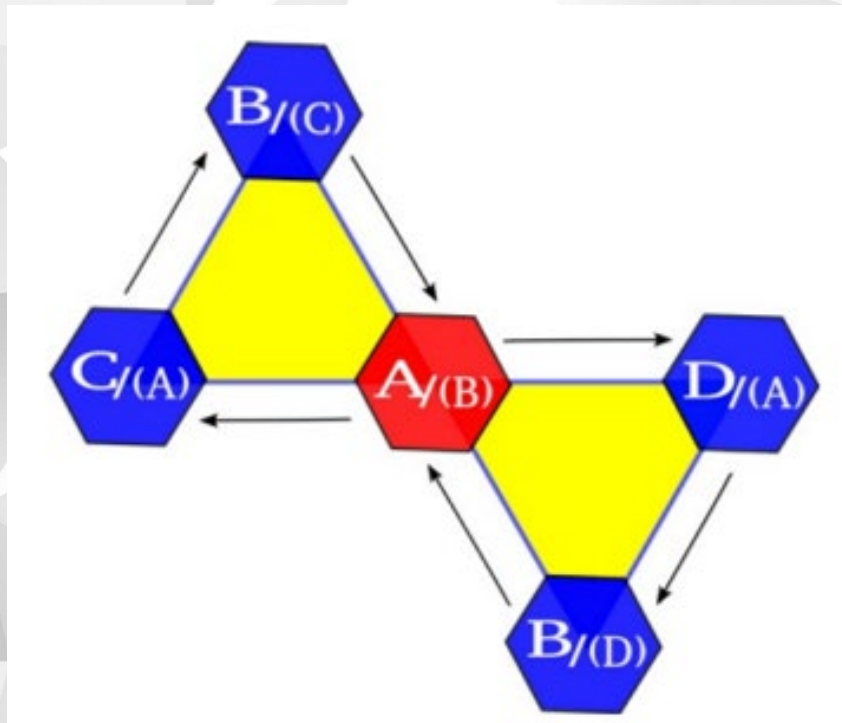
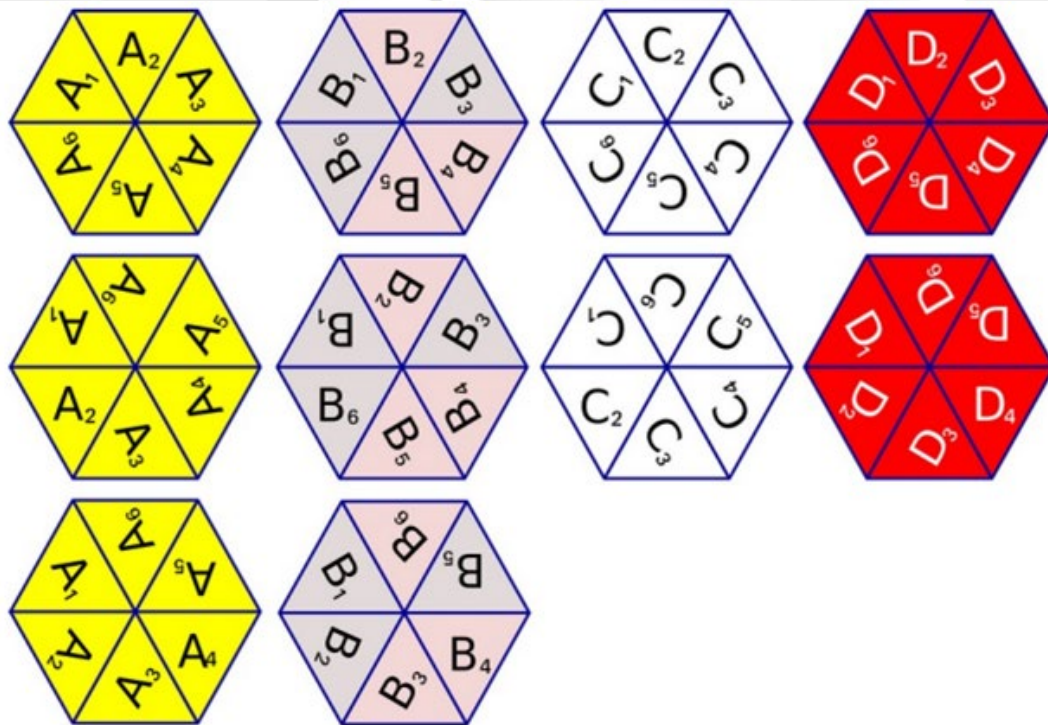


Diagrama de Flexión de Tuckerman

¿Aparecen todas las caras con la misma frecuencia?



¿Cuántas caras tiene?



Penta-hexaflexágono

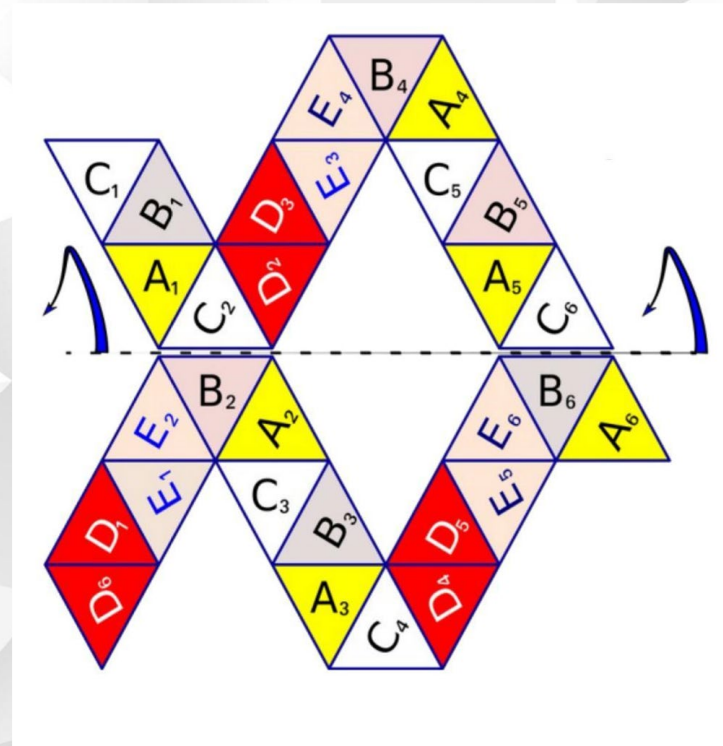
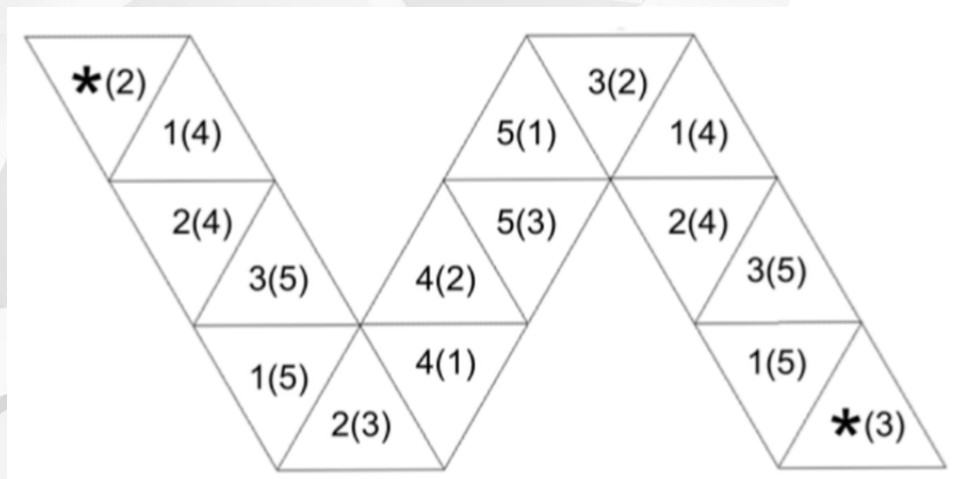
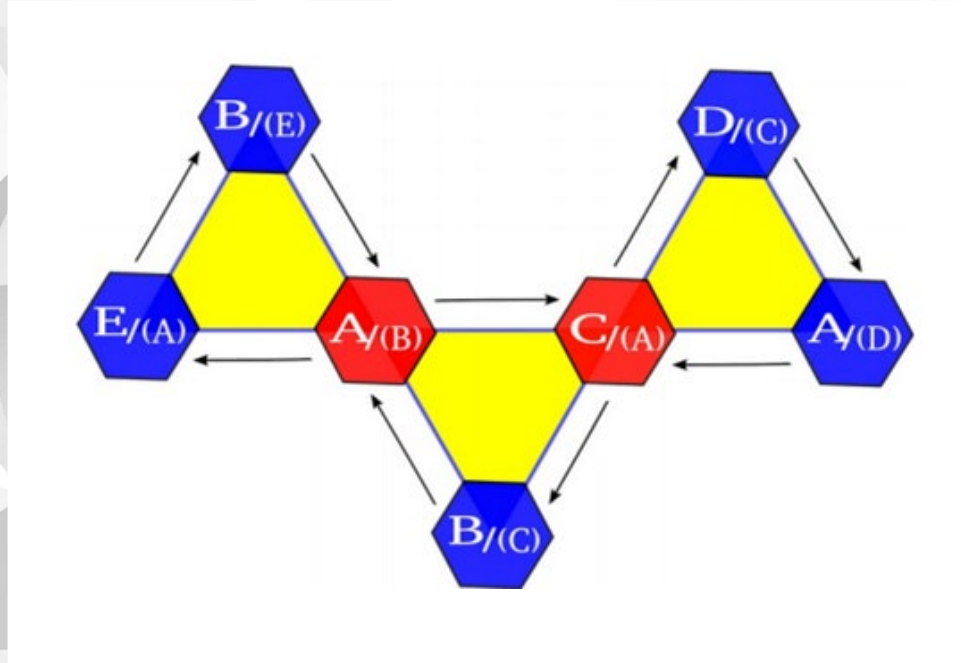
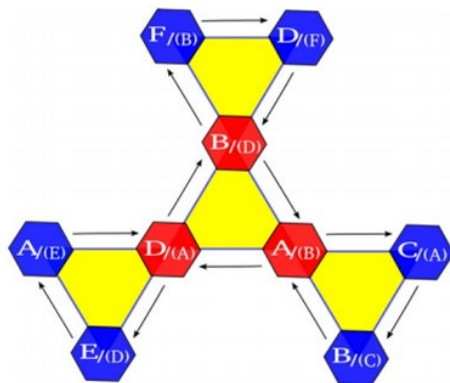
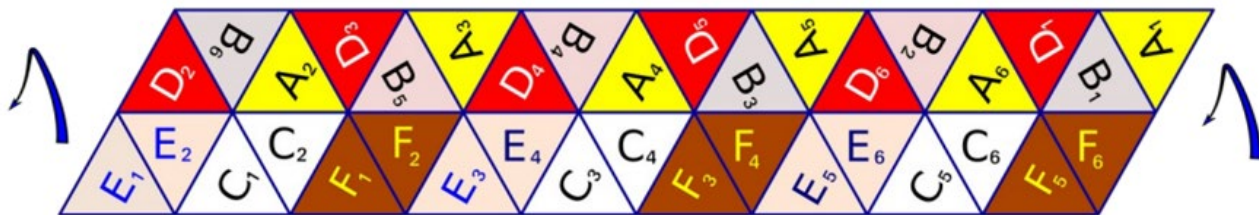


Diagrama de Flexión de Tuckerman



Hexa-hexaflexágono

Resultado de pegar dos tri-hexaflexágonos.



¿No te haces más preguntas?

¿Qué pasa si uno más tiras de triángulos equiláteros?

¿Cada hexa-hexa flexágono tiene una única plantilla?

¿Cómo se construyen las plantillas?

¿Hay más tipos de pliegues?

¿Hay otros diagramas que nos ayuden a estudiarlos?

Algunos flexágonos tienen más de una plantilla

Flexagon Faces	Numbers of Flexagons	Number of Unique Templates
3	1	1
4	1	1
5	1	1
6	3	3
7	4	3
8	12	7
9	27	8
10	82	17
11	228	21
12	733	47
13	2,282	63
14	7,528	132
15	24,834	205
16	83,898	411
17	285,357	-
18	983,244	-

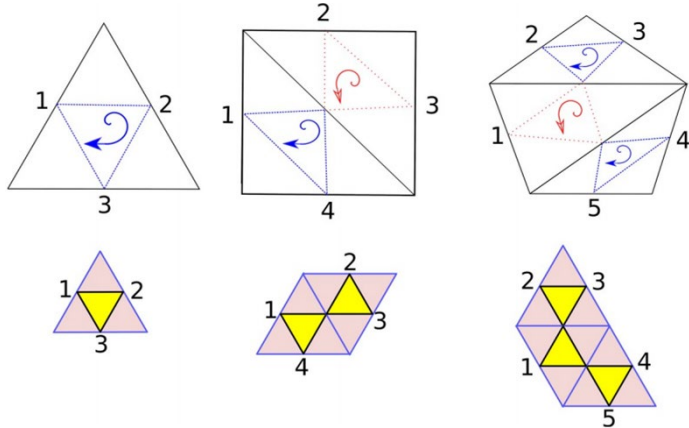
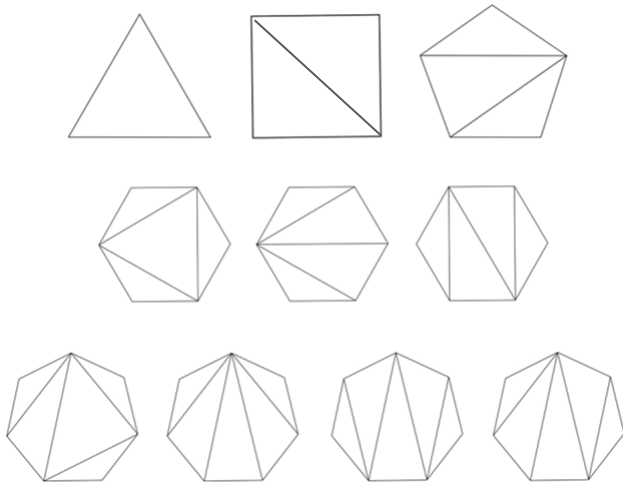
Quitando reflexiones y rotaciones,
El número de flexágonos se
corresponde con la secuencia de
Catalan.

$$C_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

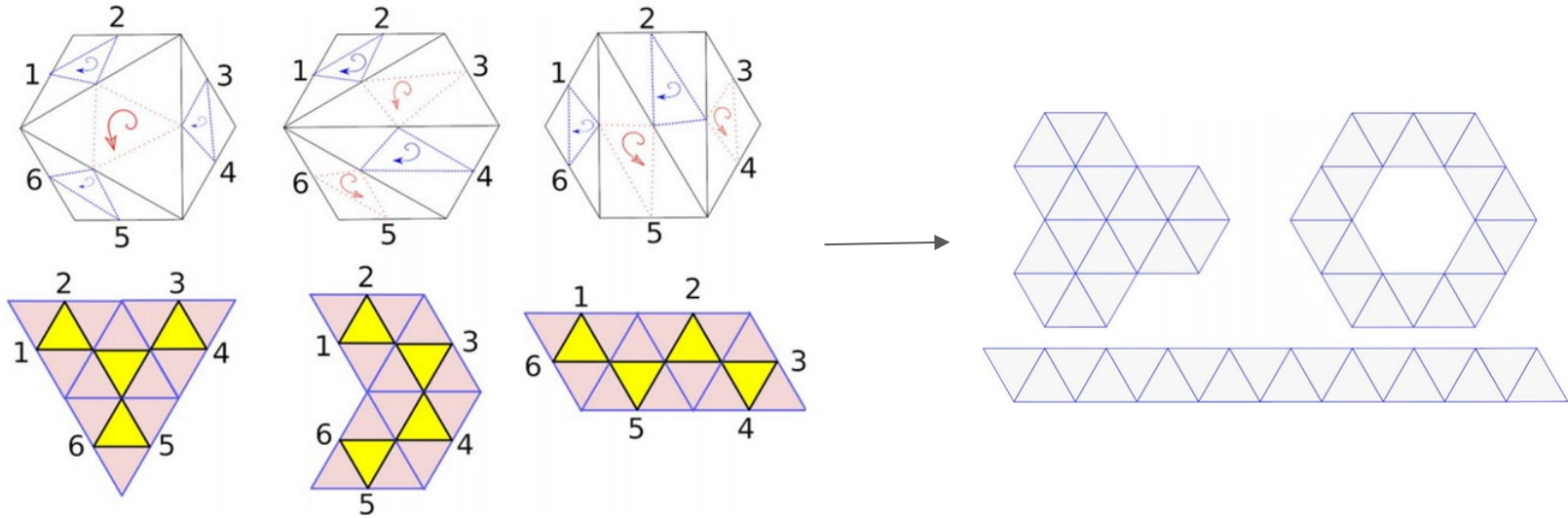
1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796,

Diagramas de triángulos de Tukey

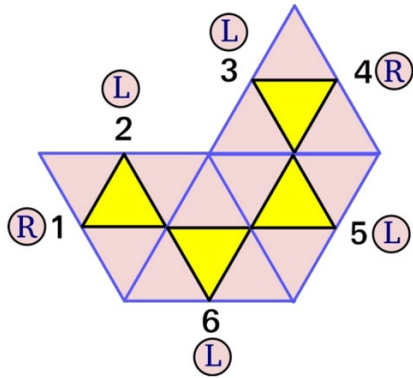
Utilizamos la triangulación de los polígono como mapas para crear las diferentes plantillas de los flexágonos.



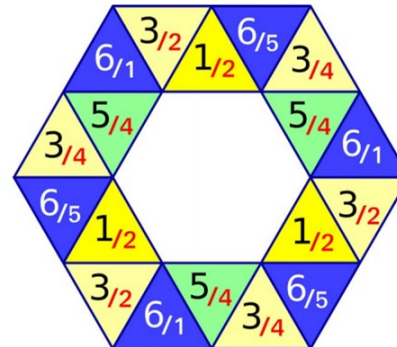
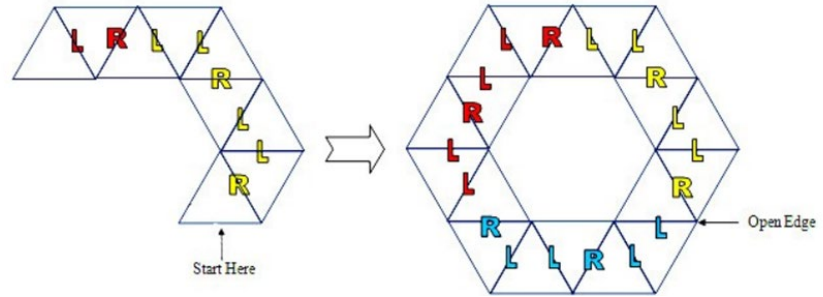
Plantillas para el hexa-hexa



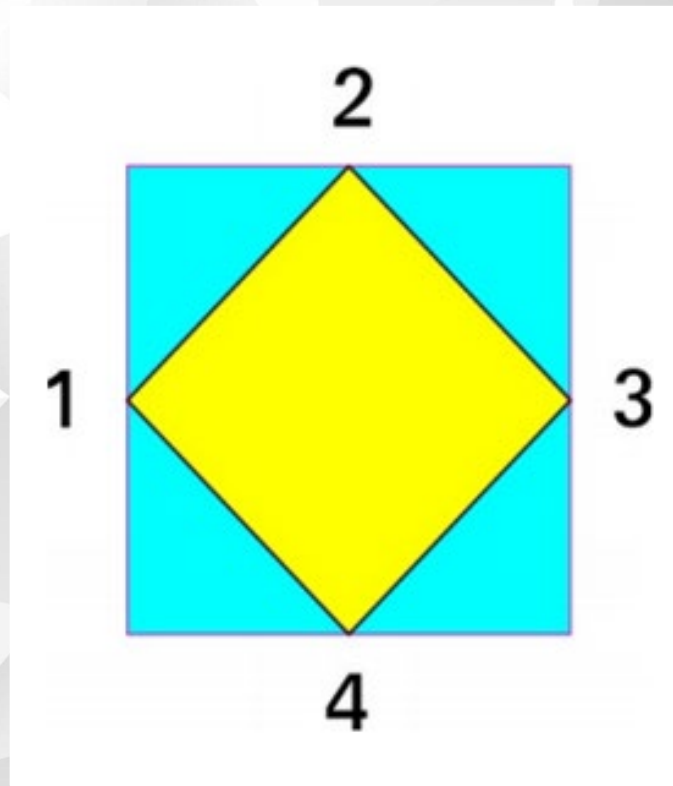
Plantillas para el hexa-hexa



Hexa-hexaflexagon #2							
1	3	6	5	3	6	1	3
2	2	1	4	4	5	2	2
R	L	L	R	L	L	R	L

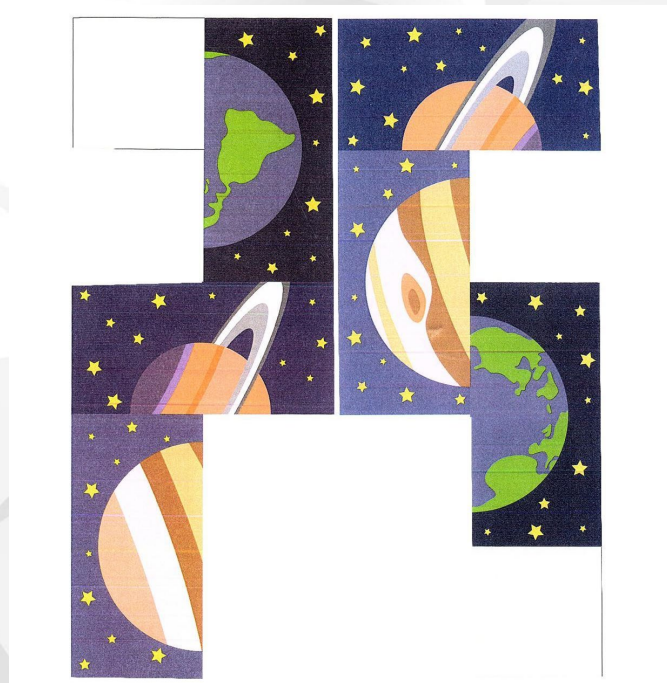


Tretraflexágonos



Tri-Tretraflexágonos

1(3)	
2(3)	2(1)
	3(1)
1(2)	3(2)



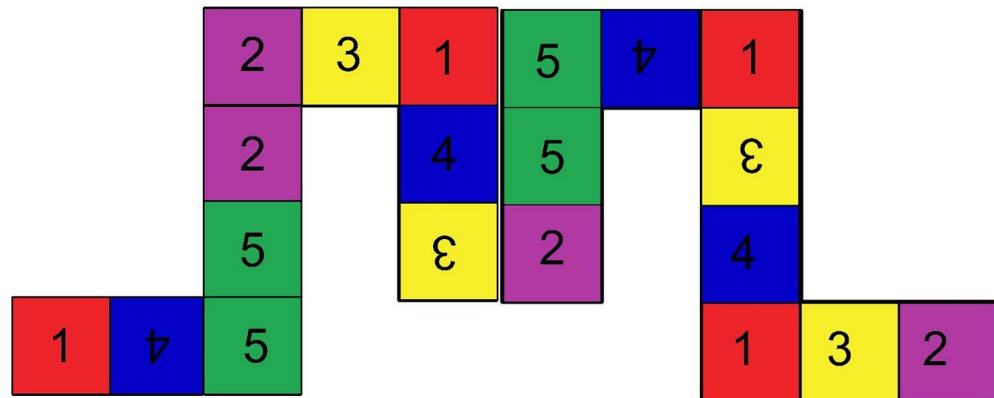
Tetra-Tetraflexágonos

1(2)	1(2)	3(4)	4(3)
4(3)	3(4)	1(2)	1(2)



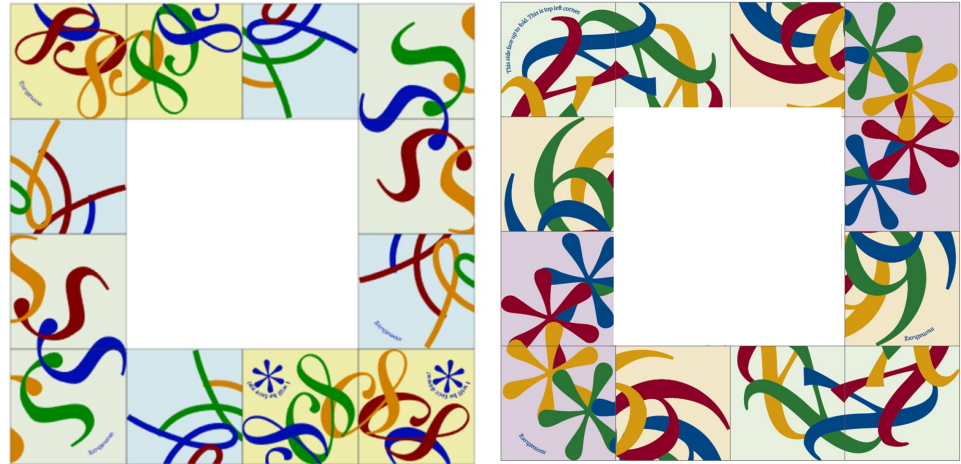
Penta-Tetraflexágonos

5 ₁	4 ₃	1 ₂	
5 ₄		3 ₂	
2 ₃		4 ₅	
	1 ₅	3 ₄	2 ₁

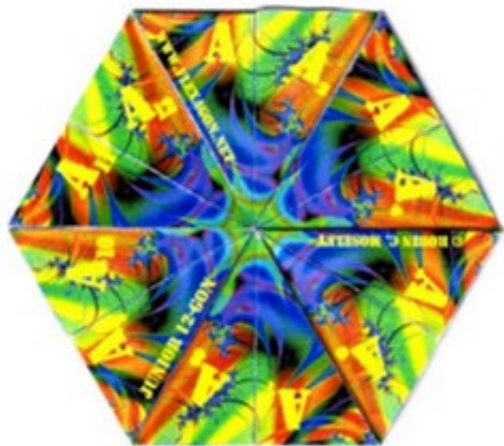


Hexa-Tetraflexágonos

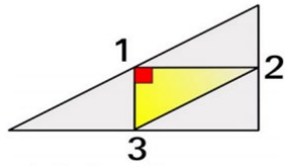
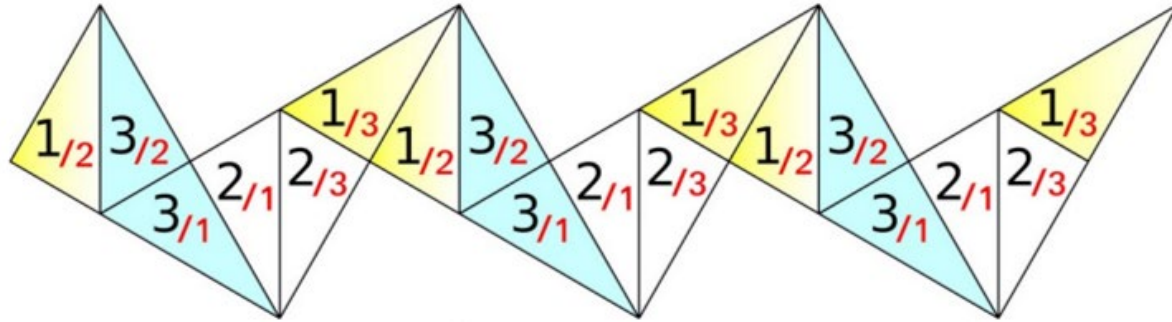
1 ₆	5 ₆	4 ₃	1 ₂
4 ₅			3 ₂
3 ₂			4 ₅
1 ₂	4 ₃	5 ₆	1 ₆



Dodecaflexágonos

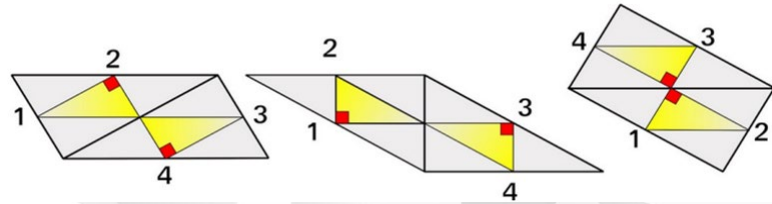
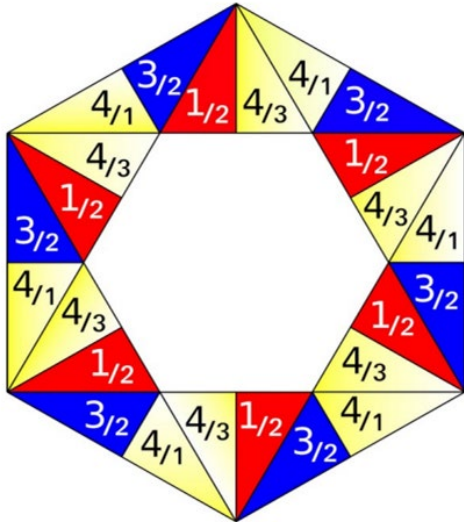


Tri-Dodecaflexágonos



Tri-dodecaflexagon				
1	3	3	2	2
2	2	1	1	3
L	R	L	R	L

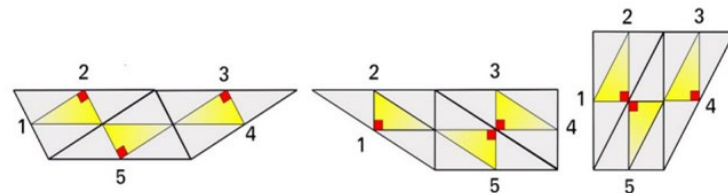
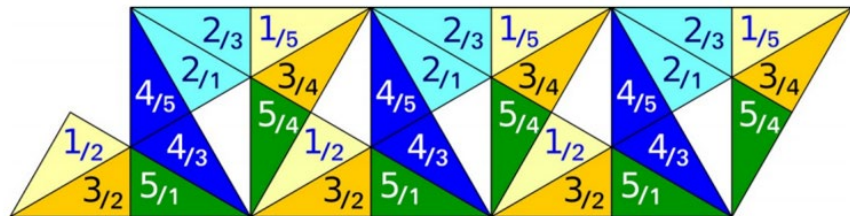
Tetra-Dodecaflexágonos



Tetra-dodecaflexagons 1, 2, 3

1	3	4	4	1	3
2	2	1	3	2	2
R	L	L	R	R	L

Penta-Dodecaflexágonos



Penta-dodecaflexagons 1, 2, 3						
1	3	5	4	4	2	2
2	2	1	3	5	1	3
R	L	L	L	R	L	R

Referencias

- Gardner, Martin “Hexaflexagons and Other Mathematical Diversions” 1959
- Gardner, Martin - “The Second Scientific American Book Of Mathematical Puzzles & Diversions”, 1961
- Bolt, Ray “Magic with Origami”, 2009
- Conrad, Anthony and Hartline, Daniel. Flexagons RIAS Technical Report, Baltimore, MD, 1962.
- Lee Pook - “Flexagons. Inside Out”, 2003
- Moseley, Robin. Flexagons as Art: Design Techniques & Templates for Makers, STEM Programs & Flexagon Artists (English Edition) 2024
- Aunt Annie’s Crafts <https://www.auntannie.com/Geometric/Flexagon/>
- Sherman, Scott <http://loki3.com/flex/>
- Moseley, Robin <https://flexagon.net/>

